احتمال مهندسی
فصل دوم: مبانی احتمال

سید مهدی سجادیه

فهرست مطالب

- آزمایش تصادفی
- قوانین مجموعه‌ها
- اصول و قضایای مجموعه‌ها
- فضای نمونه با نتایج هم شانس
- مثال‌های مربوط

آزمایش تصادفی

- آزمایش تصادفی :
  آزمایشی که نتیجه آن از قبل به طور قطعی معلوم نباشد
  مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، پیش بینی نتیجه فوتبال
- فضای نمونه:
- تمام حالتهای ممکن برای یک ازمایش تصادفی (قرارداد با S نشان می دهیم)
- مثال: در پرتاب سکه {H,T} و در پرتاب تاس {1,2,3,4,5,6}
- پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه (قرارداد: نشان دادن پیشامد با حروف بزرگ)
- پیشامد ساده: پیشامد دارای یک عضو
- پیشامد مرکب: پیشامد دارای یک عضو

آزمایش تصادفی

- مثال: در پرتاب تاس
  - E: وقوع عدد ۲: پیشامد ساده
  - F: وقوع عدد بزرگتر از ۴: پیشامد مرکب

نکته

- اگر نتیجه‌ای از یک پیشامد E رخ دهد گوییم آن پیشامد رخ داده است.
  - بنابراین همیشه فضای نمونه S رخ داده است.
  - قوانین مجموعه‌ها برای پیشامدها برقرار است

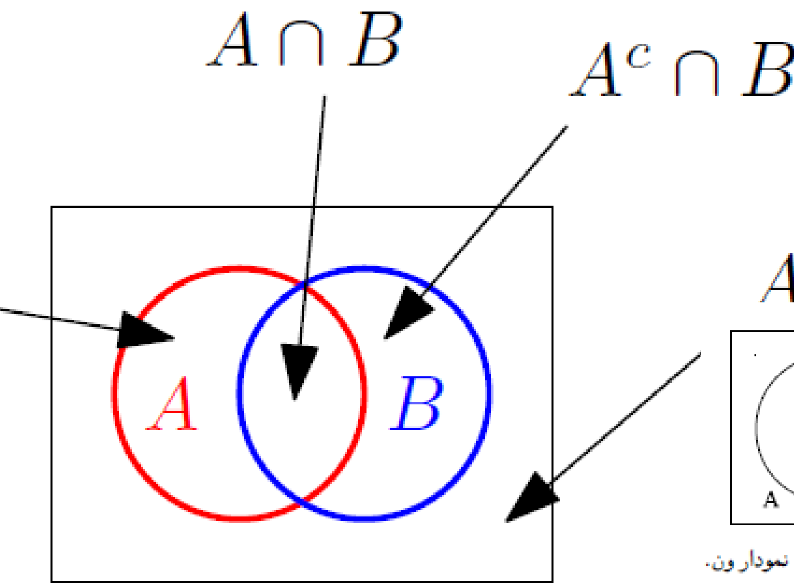
قوانین مجموعه ها

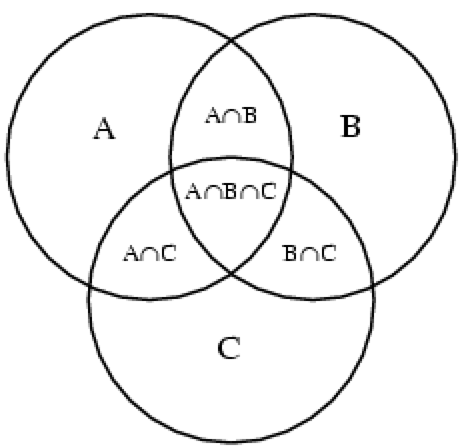
- استفاده از دیاگرام ون

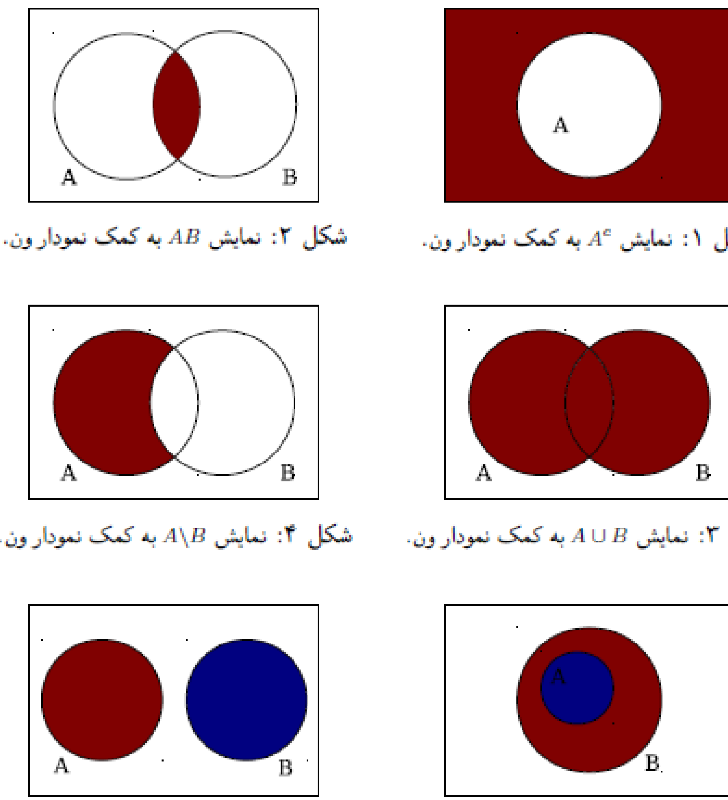
$$A - B = A \bigcap B^c$$

$$A \bigcap B$$

$$A \bigcup B$$







شکل ۱: نمایش A^c به کمک نمودار ون.

شکل ۲: نمایش AB به کمک نمودار ون.

شکل ۳: نمایش $A \cup B$ به کمک نمودار ون.

شکل ۴: نمایش $A \backslash B$ به کمک نمودار ون.

شکل ۵: نمایش $A \subseteq B$ به کمک نمودار ون.

شکل ۶: نمایش $AB = \varnothing$ به کمک نمودار و

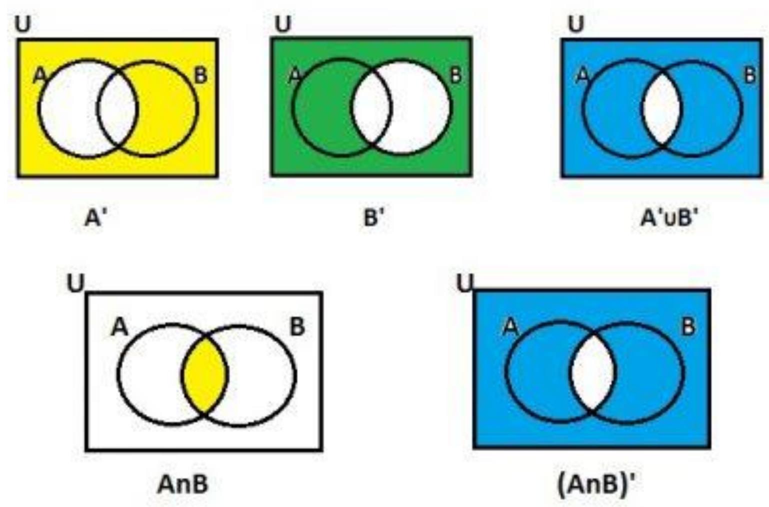
قوانین مجموعه ها

- توزیع اشتراک روی اجتماع و بالعکس

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

- قوانین دمورگان



$$(A\cup B)^c=(A^c\cap B^c)$$

$$(A\cap B)^c=(A^c\cup B^c)$$

- تعمیم قوانین دمورگان

$$(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)^c=\bigcap_{i=1}^{n}E_i^c$$

$$(\bigcap_{i=1}^{n}E_i)^c=\bigcup_{i=1}^{n}E_i^c$$

اصول احتمال

- تعریف احتمال پیشامد
- نسبت تعداد دفعات رخ دادن پیشامد A در n آزمایش وقتی که n به سمت بینهایت میل می کند.

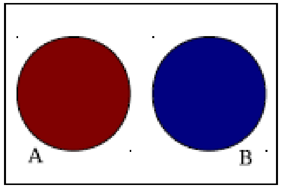
$$\Pr(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

- اصول احتمال

$$1)\ 0 \le P(A) \le 1$$

$$2)\ P(S) = 1$$

$$3)\ A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



- تعمیم قضیه اجتماع

$$1)P(\phi)=0$$

$$\phi\bigcap S=\phi, 1=P\{S\}=P\{\phi\bigcup S\}=P\{\phi\}+P\{S\}$$

$$P\{\phi\}=0$$

$$1)P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$

$$P(A\bigcap B)+P(A\bigcap C)+P(B\bigcap C)+$$

$$P(A\bigcap B\bigcap C)$$

$$2)P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i}P(A_i)-\sum_{i_1<i_2}P(A_{i_1}\bigcap A_{i_2})+$$

$$\sum_{i_1<i_2<i_3}P(A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap A_{i_3})\ldots$$

$$-(-1)^n P(A_1\bigcap A_2\bigcap\ldots\bigcap A_{i_3})$$

فضای نمونه ی هم شانس

- فضای نمونه را هم شانس گوییم اگر همه پیشامدهای ساده هم احتمال باشند.

$$S=\{1,2,..,N\}\Rightarrow P(\{1\})=P(\{2\})=\ldots P(\{N\})=\frac{1}{N}$$

  - مثال: پرتاب تاس

- مثال: احتمال رخ دادن مجموع ۶ در پرتاب دو تاس (فضای هم شانس برای هر تاس)

$$S=\left\{\begin{array}{c}(1,1),(1,2),\ldots(1,6),\\ (2,1),(2,2),\ldots(2,6),\\ \vdots\\ (6,1),(6,2),\ldots(6,6)\end{array}\right\}\Rightarrow n(S)=36$$

$$A=\left\{\begin{array}{l}(1,5),(2,4),(3,3)\\ (4,2),(5,1)\end{array}\right\}\Rightarrow n(A)=5$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

مثال

- احتمال آنکه در پرتاب ۴ تاس حداقل عدد۶ یکبار ظاهر شود؟
- راه حل اول : حل مستقیم
  - A1: یکبار ۶ ظاهر شود
  - A2: دوبار ۶ ظاهر شود
  - A3: سه بار ۶ ظاهر شود
  - A4: چهار بار ۶ ظاهر شود

$$n(S)=6^4=1296$$

$$\left.\begin{array}{l} n(A1)=\binom{4}{1}*1*5^3=500 \\ n(A2)=\binom{4}{2}*1^2*5^2=150 \\ n(A3)=\binom{4}{3}*1^3*5=20 \\ n(A4)=\binom{4}{4}*1^4=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{500+150+20+1}{1296}=\frac{671}{1296}$$

- راه حل دوم: استفاده از متمم مجموعه

A^c: در پرتاب ۴ تاس هیچ هدد ۶ نباشد

$$n(S)=6^4=1296$$

$$n(A^c)=5^4=625 \Rightarrow P(A^c)=\frac{625}{1296}$$

$$\Rightarrow P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{625}{1296}=\frac{571}{1296}$$

مثال

- در ظرفی شامل ۴ توپ قرمز، ۵ توپ سیاه و ۷ توپ سفید وجود دارد. اگر از این ظرف سه توپ انتخاب کنیم احتمال آنکه دو توپ سفید و یک توپ سیاه باشد چقدر است؟
- راه حل اول: برداشتن همزمان ۳ توپ (ترکیب)

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=\binom{16}{3}=560 \\ n(A)=\binom{7}{2}\binom{5}{1}=105 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{105}{560}=\frac{3}{16}$$

- راه حل دوم: برداشتن یکی یکی توپها (ترتیب)

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=16*15*14=3360 \\ n(A)=\underbrace{7*6*5}_{WWB}+\underbrace{7*5*6}_{WBW}+\underbrace{5*7*6}_{BWW}=630 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{630}{3360}=\frac{3}{16}$$

مثال

- اگر در اتاقی **n** نفر باشند احتمال آنکه هیچ دو نفری در یک روز به دنیا نیامده باشند چقدر است؟

- حل: برای نفر اول ۳۶۵ روز وجود دارد، نفر دوم همه روزها به غیر از روز تولد نفر اول، نفر دوم همه روزها به غیر از روز تولد نفرات اول و دوم و...

بنابراین احتمال آن به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} n(S) = \underbrace{365*365*\ldots*365}_{n} = 365^n \\ n(A) = \underbrace{365*364*\ldots*(365-n+1)}_{n} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{365*364*\ldots*(365-n+1)}{365^n}$$

نکته بسیار جالب: اگر n>23 باشد احتمال کمتر از ۰.۵ است.

مثال

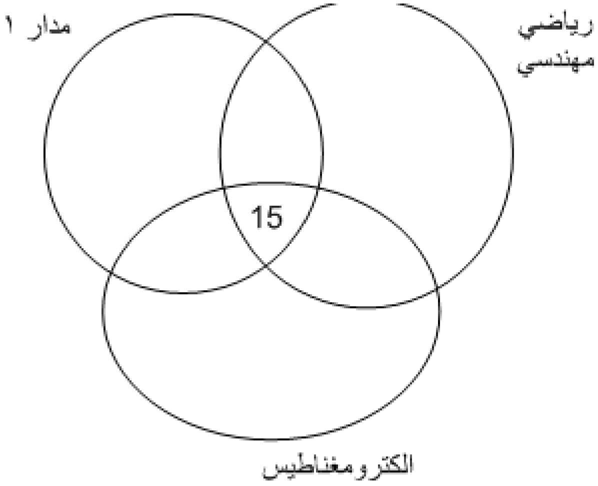
- ۸ رخ در یک صفحه شطرنج قرار گرفته اند. احتمال آن را حساب کنید که آنها هم را تهدید نکنند.

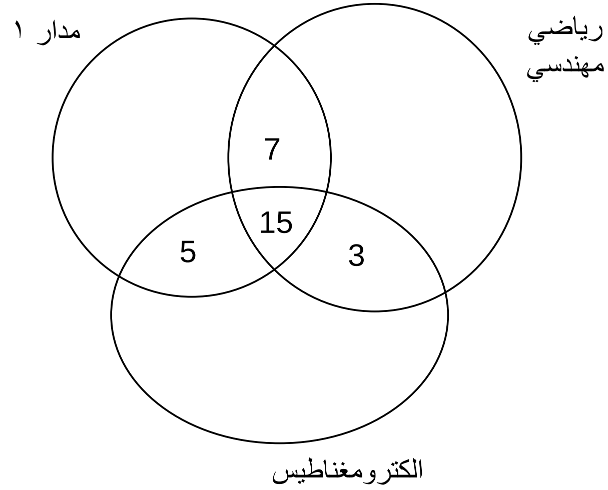
- **حل:** رخ اول در ۶۴ خانه می تواند قرار گیرد و همه اعضای سطر و ستون را تهدید می کند. همان طور که در شکل مشخص است تعداد آنها ۱۵ است. بنابراین رخ دوم در ۴۹=۱۵-۶۴ خانه می تواند قرار گیرد. برای رخ دوم نیز ۱۵ خانه وجود دارد ولی به جهت آنکه دو خانه با حذفیات بالا اشتراک دارد به جای ۱۵ برابر ۱۳ خواهد شد. ۳۶=۱۳-۴۹ و به همین ترتیب ادامه پیدا می کند.

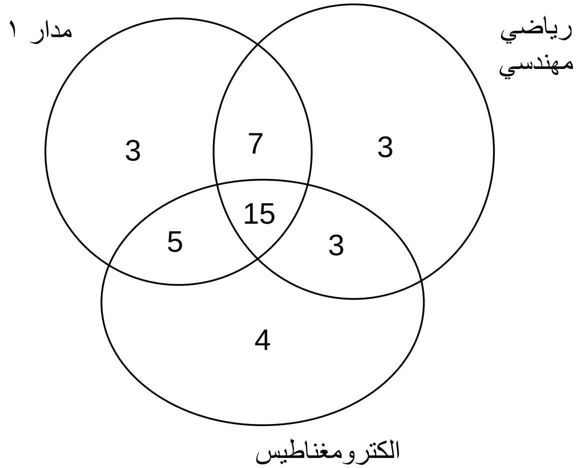
$$\left.\begin{aligned} n(S) &= 64*63*62*\ldots*57 \\ n(A) &= 64*49*36*\ldots*1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{64*49*36*\ldots*1}{64*63*62*\ldots*57}$$

مثال

- در رشته مهندسی برق دانشگاه ۶۰ نفر ثبت نام کرده اند. اگر ۳۵ نفر در درس مدار ۱، ۳۰ نفر در درس ریاضی مهندسی، ۲۸ نفر در در، ۲۷نفر در درس الکترومغناطیس، ۲۲ نفر در دو درس مدار ۱و ریاضی مهندسی، ۲۰ نفر در دو درس مدار ۱ و الکترومغناطیس، ۱۸ نفر در دو درس ریاضی مهندسی و الکترومغناطیس و ۱۵ نفر در هر سه درس ثبت نام کرده اند. یک نفر به تصادف از این کلاس نتخاب شده است.
- الف) با چه احتمالی وی تنها در دو درس ثبت نام کرده است؟
- ب) با چه احتمالی وی فقط در درس مدار ۱ ثبت نام کرده است؟
- پ) با چه احتمالی در هیچ درسی ثبت نام نکرده است؟







$$a)P1=\frac{3+5+7}{60}=\frac{1}{4}$$

$$b)P2=\frac{3+3+4}{60}=\frac{1}{6}$$

$$c)P3=\frac{60-(3+3+4+3+5+7+15)}{60}=\frac{1}{3}$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه این ۵ توپ همرنگ نبوده و شماره های آنها پشت سر هم باشد را محاسبه کنید.

- حل
- تعداد کل حالات

$$n(S) = \binom{52}{5}$$

- حالاتی که اعداد می توانند پشت سر هم باشند

$$1,2,3,4,5$$

$$2,3,4,5,6$$

$$\vdots$$

$$9,10,11,12,13$$

ادامه مثال

- حالاتی که ۵ توپ همرنگ نیستند
  - کل حالات

$$4*4*4*4*4=4^5=1024$$

  - حالاتی که توپها همرنگ هستند.

$$4*1*1*1*1=4$$

  - حالاتی که همرنگ نیستند   ۱۰۲۴-۴=۱۰۲۰

- احتمال

$$P=\frac{9*1020}{\binom{52}{5}}$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این از ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه ۴ توپ از این ۵ توپ شماره ۷ باشند را محاسبه کنید.
- حل
- تعداد کل حالات

$$n(S) = \binom{52}{5}$$

- اولین توپ حالت، دومی و سومی و چهارمی یک عدد و عدد پنجم ۴۸ حالت (همه حالات بدون ۴ عدد انتخابی)

$$P = \frac{\binom{4}{4} * 48}{\binom{52}{5}}$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این از ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه ۳ توپ از این ۵ توپ دارای یک شماره و ۲ دوتوپ دیگر شماره دیگر باشند را محاسبه کنید.

حل

- تعداد کل حالات

$$n(S) = \binom{52}{5}$$

- اولین عدد ۱۳ انتخاب دارد و باید از ۴ رنگ آن ۳ انتخاب شود. برای عدد دوم ۱۲ حالت وجود دارد و باید از ۴ رنگ مربوط به آن ۲ رنگ انتخاب شود

$$P = \frac{13 * \binom{4}{3} * 12 * \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

مثال

- یک کیسه شامل ۱۰ جفت کفش متفاوت است. ۵ لنگه را به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آنکه هیچ دو تایی از این لنگه ها با هم جفت نباشند را به دست آورید.

پاسخ مجموعه‌ی ده جفت کفش را به صورت $S = \{L_1, R_1, L_2, R_2, \cdots, L_{10}, R_{10}\}$ نشان می‌دهیم، که در آن R_i و L_i لنگه‌های سمت راست و چپ کفش i ام می‌باشند. فضای نمونه‌ای شامل تمام انتخاب‌های ۵ لنگه کفش از میان این ۲۰ لنگه کفش است. به دو صورت می‌توان آزمایش بیرون کشیدن پنج لنگه کفش را انجام داد. انتخاب یکی‌یکی پنج لنگه و انتخاب یک‌باره پنج لنگه. فضای نمونه‌ای برای این دو مدل متفاوت است.

- *راه حل اول ترتیب*
- *تعداد کل*

$$n(S) = 20*19*18*17*16$$

- *تعداد حالاتی که جفت نباشند*

$$n(A) = 20*18*16*14*12$$

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = 0.52$$

ادامه حل مثال

راه حل دوم : ترکیب

- تعداد کل

$$n(S) = \binom{20}{5}$$

- باید از ۱۰ جفت کفش ۵ جفت انتخاب شود و از هر جفت یک لنگه برداشته شود

$$n(A) = \binom{10}{5} * 2^5$$

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = 0.52$$

- تمرین: احتمال پیشامد از ۵ لنگه یک جفت و سه لنگه از سه جفت کفش متفاوت باشد را محاسبه کنید.

نکته

- اگر بخواهیم یک N شی متفاوت را کنار هم بچینیم، !N حالت وجود دارد

- اگر N شی متفاوت را کنار دور یک دایره بچینیم چون ابتدا و انتها مهم نیست !(N-1) حالت وجود دارد.
  - ابتدا و انتها وجود ندارد.

مثال

- یک کیسه شامل ۱۰ جفت کفش متفاوت است. این ۲۰ لنگه را به صورت دایره می چینیم. احتمال آنکه هیچ دو کفش از یک جفت کنار هم نباشند.

- حل:
- استفاده از متمم یعنی حداقل یک جفت کنار هم قرار بگیرند

- *تعداد کل حالات !۱۹*
- Ei: *پیشامد آنکه Ri و Li کنار هم باشند.*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2})$$

$$+ \ldots - P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)$$

ادامه حل مثال

- $n(Ei)$
- عنصر Ri و Li و حذف یک عضو جدید به جای این دو عضو
- جابه جایی دو عضو !۲

$$n(E_i) = 2!*18!$$

- عنصر $Ri1$ و $Li1$ و حذف یک عضو جدید به جای این دو عضو
- عنصر $Ri2$ و $Li2$ و حذف یک عضو جدید به جای این دو عضو

$$n(E_i) = (2*2!)*17!$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) =$$

$$10*\frac{18!*2!}{19!} - \binom{10}{2}\frac{17!*(2!)^2}{19!} + \ldots - \binom{10}{10}\frac{9!*(2!)^{10}}{19!}$$

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا عدد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.

- حل:
- در پرتاب دو تاس

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),\ldots(1,6),\\ (2,1),(2,2),\ldots(2,6),\\ \vdots \\ (6,1),(6,2),\ldots(6,6)\end{Bmatrix}\Rightarrow n(S)=36$$

$$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\Rightarrow n(A)=4\Rightarrow P(A)=\frac{4}{36}$$

$$B=\begin{Bmatrix}(1,6),(2,5),(3,4)\\ ,(4,3),(5,2),(6,1)\end{Bmatrix}\Rightarrow n(B)=6\Rightarrow P(B)=\frac{6}{36}$$

$$P(A^c\cap B^c)=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B))=$$

$$1-\frac{4}{36}-\frac{6}{36}=\frac{26}{36}$$

ادامه حل

- **E1**: در پرتاب اول برنده شوید (در پرتاب اول عدد ۵ ظاهر شود)

$$P(E1) = \frac{4}{36}$$

- **E2**: در پرتاب دوم برنده شوید (در پرتاب اول عددی غیر از ۵ و ۷ ظاهر شود و در پرتاب دوم ۵ ظاهر شود)

$$P(E2) = \frac{26}{36} * \frac{4}{36}$$

- **E3**: در پرتاب سوم برنده شوید (در پرتاب اول و دوم عددی غیر از ۵ و ۷ ظاهر شود و در پرتاب سوم ۵ ظاهر شود)

$$P(E3) = \frac{26}{36} * \frac{26}{36} * \frac{4}{36}$$

- ...

ادامه حل

- احتمال برنده شدن

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_\infty)$$

- چون این Eiها ناسازگارند بنابراین:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \left(\frac{4}{36}\right) = \frac{\frac{4}{36}}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{4}{10}$$

احتمال شرطی

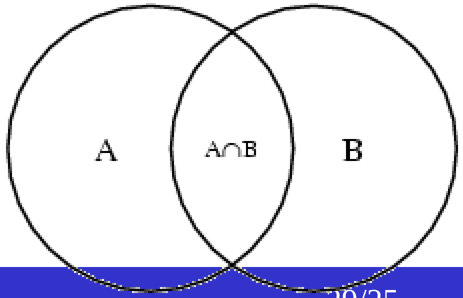
- احتمال شرطی
- قانون بیز
- استقلال
- مثال‌های مربوط

احتمال شرطی

- وقتی که بدانیم یک اتفاقی افتاده که موجب شده فضای نمونه کوچکتر شود برای محاسبه احتمال از لفظ احتمال شرطی استفاده می کنیم.
- کاربرد احتمال شرطی
  - محاسبه احتمال با شرط
  - محاسبه احتمال با چند پارامتر

- مثال
  - پرتاب تاس با علم به آنکه نتیجه زوج باشد.
- رابطه احتمال شرطی

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}$$



احتمال شرطی

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$$

- در مسایل احتمال شرطی مهمترین نکته در حل مسایل تعریف دقیق پیشامدهاست.

مثال: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر یکی از انها پسر باشد احتمال آنکه هر دو فرزند پسر باشند چقدر است؟

حل:

E: پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان پسر باشد.

F: پیشامد آنکه هر دو فرزند پسر باشند.

$$S=\{(g,g),(g,b),(b,g),(b,b)\}$$

$$E=\{(g,b),(b,g),(b,b)\}$$

$$F=\{(b,b)\} \Rightarrow F\cap E=\{(b,b)\}$$

$$P(F|E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

مثال: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر فرزند اول پسر باشد احتمال آنکه هر دو فرزند پسر باشند چقدر است؟

حل:

E: پیشامد آنکه فرزند اول پسر باشد.

F: پیشامد آنکه هر دو فرزند پسر باشند.

$$S=\{(g,g),(g,b),(b,g),(b,b)\}$$

$$E=\{(b,g),(b,b)\}$$

$$F=\{(b,b)\}\Rightarrow F\cap E=\{(b,b)\}$$

$$P(F\mid E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$$

مثال

- دوتاس را باهم پرتاب می کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از آنها ۶ باشد به شرط آنکه بدانیم نتیجه دوتاس متفاوت است چقدر است؟
- حل:
- S: پیشامد پرتاب دوتاس
- B: پیشامد نتیجه متفاوت دو تاس
- A: پیشامد حضور ۶ در پرتاب

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),\ldots(1,6), \\ (2,1),(2,2),\ldots(2,6), \\ \vdots \\ (6,1),(6,2),\ldots(6,6) \end{Bmatrix}$$

مثال

- دوتاس را باهم پرتاب می کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از آنها ۶ باشد به شرط آنکه بدانیم نتیجه دوتاس متفاوت است چقدر است؟
- حل:
- S: پیشامد پرتاب دوتاس
- B: پیشامد نتیجه متفاوت دو تاس
- A: پیشامد حضور ۶ در پرتاب

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),\ldots(1,6), \\ (2,1),(2,2),\ldots(2,6), \\ \vdots \\ (6,1),(6,2),\ldots(6,6) \end{Bmatrix}$$

$$B=\begin{Bmatrix} (1,2),\ldots,(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,3),\ldots(2,6), \\ \vdots \\ (6,1),(6,2),\ldots(6,5) \end{Bmatrix} \Rightarrow n(B)=30$$

$$A=\begin{Bmatrix} (1,6),(6,1),(2,6), \\ (6,2),(3,6),(6,3), \\ \ldots(6,6) \end{Bmatrix} \Rightarrow A\bigcap B=A-\{(6,6)\} \Rightarrow n(A\bigcap B)=10$$

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}}=\frac{1}{3}$$

مثال

- در ظرفی۲۵ لامپ وجود دارد که ۵ عدد از آنها سالم هستند، ۱۰ تای انها نیمه معیوبند (یعنی در ابتدا روشن می شوند ولی بعد از دو روز خاموش می شوند) و بقیه خرابند. لامپی از این ظرف انتخاب می کنیم. اگر لامپ روشن۲ شد با چه احتمالی لامپ سالم است؟
- حل:
- T: پیشامد روشن شدن اولیه لامپ
- T^c: پیشامد خراب بودن لامپ
- G: پیشامد سالم بودن لامپ

مثال

- در ظرفی۲۵ لامپ وجود دارد که ۵ عدد از آنها سالم هستند، ۱۰ تای انها نیمه معیوبند (یعنی در ابتدا روشن می شوند ولی بعد از دو روز خاموش می شوند) و بقیه خرابند. لامپی از این ظرف انتخاب می کنیم. اگر لامپ روش۲ شد با چه احتمالی لامپ سالم است؟
- حل:
- **T**: پیشامد روشن شدن اولیه لامپ
- **T^c**: پیشامد خراب بودن لامپ
- **G**: پیشامد سالم بودن لامپ

$$P(G\,|\,T)=\frac{P(G\cap T)}{P(T)}=\frac{P(G)}{1-P(T^c)}=\frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}}=\frac{1}{3}$$

تعمیم قانون ضرب احتمال‌ها

- فرض کنید **E1** تا **En**، **n** باشند در این صورت:

$$P(E_1 E_2 E_3 \dots E_n) =$$
$$P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2)\dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1})$$

- مثال: جعبه ای دارای۶ مهره‌ی سیاه و ۱۲ مهره‌ی سفید وجود دارد. اگر چهارتوپ از این کیسه و بدون جایگذاری برداریم احتمال آن را حساب کنید که سه توپ اول سفید و توپ آخر سیاه باشد.
- حل
- ***W1**: پیشامد آنکه توپ اول سفید باشد.*
- ***W2**: پیشامد آنکه توپ دوم سفید باشد.*
- ***W3**: پیشامد آنکه توپ سوم سفید باشد.*
- ***B4**: پیشامد آنکه توپ چهارم سیاه باشد.*

$$P(W1 \cap W2 \cap W3 \cap B4) =$$
$$P(W1)P(W2|W1)P(W3|W1 \cap W2)$$
$$P(W4|W1 \cap W2 \cap W3) =$$
$$\frac{12}{18} * \frac{11}{17} * \frac{10}{16} * \frac{6}{15}$$

مثال

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ در پایان این ترم خواهد گرفت. ؟
- حل:
- **E1**: پیشامد انتخاب درس مدار ۱
- **N**: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

مثال

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ در پایان این ترم خواهد گرفت. ؟
- حل:
- **E1**: پیشامد انتخاب درس مدار ۱
- **N**: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

$$P(E1 \cap N) = P(N \mid E1)P(E1) = 0.75 * \frac{1}{2} = 0.375$$

قضیه

- اگر E و F دو پیشامد باشند طبق رابطه مجموعه‌ها داریم:

$$E = E \cap S = E \cap (F \cup F^c) = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$

- با توجه به ناسازگاری دو مجموعه داریم:

$$P(E) = P((E \cap F) \cup (E \cap F^c)) =$$
$$P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

- با توجه به احتمال شرطی داریم:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$
$$= P(E \mid F)P(F) + P(E \mid F^c)P(F^c)$$

تعمیم مثال قبل

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ پایان این ترم از درس انتخابی کسب می کند ؟
- حل:
- **E1**: پیشامد انتخاب درس مدار ۱
- **T**: پیشامد انتخاب درس الکترومغناطیس
- **N**: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

تعمیم مثال قبل

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ پایان این ترم از درس انتخابی کسب می کند ؟
- حل:
- **E1**: پیشامد انتخاب درس مدار ۱
- **T**: پیشامد انتخاب درس الکترومغناطیس
- **N**: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

$$P(N) = P(N \mid E1)P(E1) + P(N \mid T)P(T)$$

$$= 0.75 * \frac{1}{2} + 0.6 * \frac{1}{2} = 0.675$$

قانون بیز

- اگر **A** و **B** دو پیشامد باشند می دانیم:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

- در بسیاری از کاربردها **P(A|B)** وجود ندارد ولی در عوض **P(B|A)** وجود دارد در این صورت می توان از قانون بیز برای محاسبه احتمال استفاده نمود:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در سال تصادف کند چقدر است؟

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در سال تصادف کند چقدر است؟
- حل:
- A: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

$$= 0.4 * \frac{3}{10} + 0.2 * \frac{7}{10} = 0.26$$

مثال (ادامه)

- فرض کنید که یک فرد بیمه شده در سال تصادف کرده باشد. احتمال آنکه او از گروه مستعد باشد چقدر است؟
- حل:
- A: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف
- P(B|A)

مثال (ادامه)

- فرض کنید که یک فرد بیمه شده در سال تصادف کرده باشد. احتمال آنکه او از گروه مستعد باشد چقدر است؟
- حل:
- **A**: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده
- **B**: مستعد تصادف
- **B^c**: غیر مستعد تصادف
- **P(B|A)**

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\mid B)P(A)}{P(B)}=\frac{0.4*0.3}{0.26}=\frac{12}{26}$$

مثال

- دریک امتحان تستی با ۴ پاسخ، دانشجویی یا پاسخ سوال را می داند یا به صورت شانسی با احتمال ۰.۲۵ جواب صحیح را انتخاب می کند. مطلوب است احتمال آنکه دانشجویی جواب سوالی را می دانسته به شرط آنکه جواب درست داده باشد با فرض اینکه احتمال دانستن جواب هر سوال برای دانشج برابر p است.
-

مثال

- دریک امتحان تستی با ۴ پاسخ، دانشجویی یا پاسخ سوال را می داند یا به صورت شانسی با احتمال ۰.۲۵ جواب صحیح را انتخاب می کند. مطلوب است احتمال آنکه دانشجویی جواب سوالی را می دانسته به شرط آنکه جواب درست داده باشد با فرض اینکه احتمال دانستن جواب هر سوال برای دانشجو برابر **p** است.
- حل:
  - **T**: پیشامد صحیح جواب دادن سوال
  - **K**: پیشامد آنکه جواب سوال را می داند
  - **K^c**: پیشامد آنکه جواب سوال را نمی داند
  - **P(K|T)**

$$P(K\mid T)=\frac{P(K\cap T)}{P(T)}=\frac{P(T\mid K)P(K)}{P(T)}=\frac{1*p}{1*p+0.25*(1-p)}=\frac{p}{0.25+0.75p}$$

مثال

- برای یک بیماری، نوعی آزمایش خون به کار میرود که در تشخیص افراد بیمار دارای صحت ۹۵٪ است ولی به اشتباه ۱٪ افراد سالم را هم بیمار تشخیص می دهد. فرض کنید ۰.۰۰۰۱ افراد جامعه دارای این بیماری هستند. اگر فردی جواب آزمایش ان مثبت باشد با چه احتمالی وی بیمار است.
- حل:
- C: پیشامد جواب مثبت بیماری
- B: پیشامد بیمار بودن آزمایش دهنده
- B^c: پیشامد سالم بودن آزمایش دهنده
- P(K|T)

$$P(B\mid C)=\frac{P(C\mid B)P(B)}{P(C)}=\frac{P(C\mid B)P(B)}{P(C\mid B)P(B)+P(C\mid B^c)P(B^c)}$$

$$=\frac{0.95*0.005}{0.95*0.005+0.01*0.995}=0.323$$

افراز یک مجموعه

- فرض کنید F1 وF2 و ... و Fn، n مجموعه هستند که S را افراز کرده اند یعنی:

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$$

$$F_i \bigcap F_j = \phi \; if \quad i \neq j$$

- در این صورت برای محاسبه احتمال پیشامد E با توجه به F1تا Fn و تعمیم قضیه بیز داریم:

$$P(E) = P((E \bigcap F_1) \bigcup (E \bigcap F_2) \bigcup \ldots \bigcup (E \bigcap F_2)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(E \bigcap F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) P(F_i)$$

مثال

- سه کارت داریم که تنها تفاوتشان در رنگ آنهاست. یک کارت در دوطرف به رنگ سیاه، یک کارت در دو طرف به رنگ قرمز و یک کارت در یک طرف سیاه و یک طرف قرمز است. از درون کیسه یک کارت بیرون می کشیم و روی میز می گذاریم. رنگ روی این کارت قرمز است. احتمال این که طرف دیگر آن قرمز باشد، چقدراست؟
- حل:
  - RR: پیشامد انتخاب کارت دو رو قرمز
  - BB: پیشامد انتخاب کارت دو رو سیاه
  - RB : پیشامد انتخاب کارت یک رو قرمز یک رو سیاه
  - R : پیشامد مشاهده یک روی قرمز کارت
  - $P(RR|R)$

حل مثال

$$P(RR \mid R) = \frac{P(R \mid RR)P(RR)}{P(R)} =$$

$$\frac{P(R \mid RR)P(RR)}{P(R \mid RR)P(RR) + P(R \mid BB)P(BB) + P(R \mid RB)P(RB)} =$$

$$\frac{P(R \mid RR)P(RR)}{\underbrace{P(R \mid RR)}_{1}\underbrace{P(RR)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{P(R \mid BB)}_{0}\underbrace{P(BB)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{P(R \mid RB)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P(RB)}_{\frac{1}{3}}} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

مثال

- دو جعبه وجود دارد که در اولی ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی دوم ۶ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سفید وجود دارد. الف) به تصادف یک مهره از یکی از جعبه‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره سفید باشد چقدر است؟
- ب) اگر مهره انتخاب شده سیاه باشد احتمال آنکه از جعبه دوم باشد چقدر است

مثال

- دو جعبه وجود دارد که در اولی ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی دوم ۶ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سفید وجود دارد. الف) به تصادف یک مهره از یکی از جعبه‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره سفید باشد چقدر است؟
- ب) اگر مهره انتخاب شده سیاه باشد احتمال آنکه از جعبه دوم باشد چقدر است
- حل:
- **W1**: پیشامد مهره اول انتخابی سفید
- **X1**: پیشامد انتخاب جعبه اول و **X2**: پیشامد انتخاب جعبه دوم

$$P(W1) = P(W1|X1)P(X1) + P(W1|X2)P(X2) = \frac{4}{7}*\frac{1}{2}+\frac{1}{7}*\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$$

- **B1**: پیشامد مهره اول انتخابی سیاه

$$P(X2|B1)=\frac{P(B1|X2)P(X2)}{P(B1)}=\frac{\frac{6}{7}*\frac{1}{2}}{\frac{6}{7}*\frac{1}{2}+\frac{3}{7}*\frac{1}{2}}=\frac{6}{9}$$

مثال

- دو جعبه وجود دارد که در اولی ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی دوم ۶ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سفید وجود دارد. پ) از یک جعبه مهره سفیدی انتخاب شده است. اگر از همان جعبه مهره‌ی دیگری انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

مثال

- دو جعبه وجود دارد که در اولی ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی دوم ۶ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سفید وجود دارد. پ) از یک جعبه مهره سفیدی انتخاب شده است. اگر از همان جعبه مهره‌ی دیگری انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

- **W1**: پیشامد مهره اول انتخابی سفید
- **X1**: پیشامد انتخاب جعبه اول و **X2**: پیشامد انتخاب جعبه دوم
- **B2**: پیشامد مهره دوم انتخابی سیاه

$$P(B2|W1)=\frac{P(B2\cap W1)}{P(W1)}$$

$$P(B2\cap W1)=P(B2\cap W1|X1)P(X1)+P(B2\cap W1|X2)P(X2)=$$

$$=\frac{4}{7}*\frac{3}{6}*\frac{1}{2}+\frac{1}{7}*\frac{6}{6}*\frac{1}{2}=\frac{18}{84}$$

$$P(B2|W1)=\frac{P(B2\cap W1)}{P(W1)}=\frac{\frac{18}{84}}{\frac{5}{14}}=\frac{3}{5}$$

مثال

- دو جعبه وجود دارد که در اولی ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی دوم ۶ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سفید وجود دارد.

ت) از جعبه‌ای یک مهره انتخاب کرده و رنگ آن را مشاهده می‌کنیم و مجدداً مهره‌ی دیگری انتخاب می‌کنیم (بدون جایگذاری). احتمال آن را حساب کنید که مهره‌ی انتخابی دوم با مهره‌ی انتخابی اول همرنگ باشد.

مثال

- دو جعبه وجود دارد که در اولی ۳ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی دوم ۶ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی سفید وجود دارد.

ت) از جعبه‌ای یک مهره انتخاب کرده و رنگ آن را مشاهده می‌کنیم و مجدداً مهره‌ی دیگری انتخاب می‌کنیم (بدون جایگذاری). احتمال آن را حساب کنید که مهره‌ی انتخابی دوم با مهره‌ی انتخابی اول همرنگ باشد.

- حل:

باید هردو سفید و یا هردو سیاه باشند

$$P(W2 \cap W1) = P(W2 \cap W1 \mid X1)P(X1) + P(W2 \cap W1 \mid X2)P(X2) =$$

$$= \frac{4}{7} * \frac{3}{6} * \frac{1}{2} + \frac{1}{7} * \frac{0}{6} * \frac{1}{2} = \frac{12}{84}$$

$$P(B2 \cap B1) = P(B2 \cap B1 \mid X1)P(X1) + P(B2 \cap B1 \mid X2)P(X2) =$$

$$= \frac{3}{7} * \frac{2}{6} * \frac{1}{2} + \frac{6}{7} * \frac{5}{6} * \frac{1}{2} = \frac{36}{84}$$

$$\frac{36}{84} + \frac{12}{84} = \frac{48}{84}$$

مثال

- هواپیمایی در مسیر خود ناپدید شده است و با شانس مساوی فرض می شود در یکی از سه منطقه سقوط کرده است. فرض کنید احتمال **1-pi** نشان دهنده این احتمال باشد که هواپیما در منطقه **i**ام که واقعا در آن سقوط کرده است پیدا شود. فرض کنید جستجو در منطقه اول نا موفق بوده است احتمال آن را حساب کنید که
- الف) هواپیما در منطقه ۳ سقوط کرده باشد.
- ب) هواپیما در منطقه ۱ سقوط کرده باشد.
- حل:
- **Ri:** سقوط هواپیما در منطقه **i**ام
- **E1:** پیشامد جستجوی ناموفق در منطقه ۱

$$P(R_3 \mid E_1) = \frac{P(E_1 \mid R_3)P(R_3)}{P(E_1)} =$$

$$\frac{P(E_1 \mid R_3)P(R_3)}{P(E_1 \mid R_1)P(R_1) + P(E_1 \mid R_2)P(R_2) + P(E_1 \mid R_3)P(R_3)} =$$

$$\frac{1 * \frac{1}{3}}{p_1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 + p_1}$$

ادامه مثال

- ب)

$$P(R_1 \mid E_1) = \frac{P(E_1 \mid R_1)P(R_1)}{P(E_1)} =$$

$$\frac{P(E_1 \mid R_1)P(R_1)}{P(E_1 \mid R_1)P(R_1) + P(E_1 \mid R_2)P(R_2) + P(E_1 \mid R_3)P(R_3)} =$$

$$\frac{p_1 * \frac{1}{3}}{p_1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{p_1}{2 + p_1}$$

پیشامدهای مستقل

- اگر $P(A|B)=P(A)$ در این صورت می توان گفت با داشتن B اطلاعات جدیدی درباره A نداریم
- به عبارت دیگر پیشامد A و B از هم مستقل هستند

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)} \xrightarrow{if\ (P(A|B)=P(A))} P(A\bigcap B)=P(A)P(B)$$

- اگر A و B مستقل باشند پیشامدهای زیر هم از هم مستقل هستند:

$$A, B^c$$

$$B, A^c$$

$$A^c, B^c$$

- ناسازگاری مخالف استقلال

مثال

- سکه ای را دوبار پرتاب می کنیم. اگر **E** پیشامد شیر آمدن سکه اول و **F** خط آمدن سکه دوم باشد آیا **E** و **F** مستقل هستند؟
- حل:
  - **E** پیشامد شیر آمدن سکه اول
  - **F** پیشامد خط آمدن سکه دوم

$$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

$$E=\{(H,H),(H,T)\}\Rightarrow P(E)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$F=\{(H,T),(T,T)\}\Rightarrow P(F)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$E\cap F=\{(H,T)\}\Rightarrow P(E\cap F)=\frac{1}{4}=P(E)*P(F)$$

مثال

- دوتاس را همزمان پرتاب می کنیم. اگر **E** پیشامد ۴ امدن تاس اول و **F** پیشامد مجموع ۶ تاس دوم باشد آیا **E** و **F** مستقل هستند؟
- حل:
  - **E** پیشامد ۴ امدن تاس اول
  - **F** پیشامد مجموع ۶ تاس دوم

$$E=\{(4,1),(4,2),\ldots(4,6)\}\Rightarrow P(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$F=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}\Rightarrow P(F)=\frac{5}{36}$$

$$E\cap F=\{(4,2)\}\Rightarrow P(E\cap F)=\frac{1}{36}\neq P(E)*P(F)$$

مثال

- دوتاس را همزمان پرتاب می کنیم. اگر **E** پیشامد ۴ امدن تاس اول و **F** پیشامد مجموع ۷ تاس دوم باشد آیا **E** و **F** مستقل هستند؟
- حل:
  - **E** پیشامد ۴ امدن تاس اول
  - **F** پیشامد مجموع ۷ تاس دوم

$$E=\{(4,1),(4,2),\ldots(4,6)\}\Rightarrow P(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$F=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}\Rightarrow P(F)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$E\cap F=\{(4,2)\}\Rightarrow P(E\cap F)=\frac{1}{36}=P(E)*P(F)$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف(سفید، قرمز، سبز وآبی) وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. اگر **E** پیشامد آمدن توپ ۱و **F** پیشامد رنگ قرمز باشد آیا **E** و **F** مستقل هستند؟
- حل:
  - **E** پیشامد آمدن توپ ۱
  - **F** پیشامد رنگ قرمز

$$P(E)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

$$P(F)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$P(E\cap F)=\frac{1}{52}=P(E)*P(F)$$

حال که با تعریف دو پیشامد مستقل آشنا شدیم، می‌خواهیم استقلال را در حالت کلی تعریف کنیم. ممکن است تصور شود که استقلال دوبه‌دوی پیشامدها، استقلال تمام پیشامدها را تضمین می‌کند. استقلال دوبه‌دو اگرچه لازم است، ولی کافي نیست.

مثلاً اگر $A_1, A_1, \cdots, A_7$ مستقل باشند، انتظار داریم روابطی مانند رابطه‌ی زیر برقرار باشند:

$$\Pr(A_1 A_4^c (A_5 \cup A_6^c)) \mid A_2 A_3 A_7^c) = \Pr(A_1 A_4^c (A_5 \cup A_6^c))$$

اما چنین روابطی را از روی استقلال دوبه‌دوی پیشامدها نمی‌توان استنتاج کرد. بنا براین تعریفی که برای استقلال چند پیشامد در نظر می‌گیریم، به صورت زیر است.

تعریف پیشامدهای $\{A_1, A_1, \cdots, A_n\}$ را مستقل گویند، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ای مانند $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}\}$ از مجموعه‌ی فوق، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\Pr(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) = \Pr(A_{i_1}) \Pr(A_{i_2}) \cdots \Pr(A_{i_r})$$

مثال ۷ *برای استقلال سه پیشامد A، B و C باید داشته باشیم:*

$$\begin{aligned}
\Pr(ABC) &= \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C) \\
\Pr(AB) &= \Pr(A)\Pr(B) \\
\Pr(AC) &= \Pr(A)\Pr(C) \\
\Pr(BC) &= \Pr(B)\Pr(C)
\end{aligned}$$

مثال ۸ سه پیشامد دوبه‌دو مستقل مثال بزنید که هر سه از هم مستقل نباشند.
آزمایش دوبار پرتاب سکه‌ای سالم را درنظر بگیرید. پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A: حاصل اولین پرتاب شیر باشد.

B: حاصل دومین پرتاب شیر باشد.

C: حاصل اولین و دومین پرتاب یکسان باشد.

داریم:

$$\Pr(A) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Pr(B) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Pr(C) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Pr(AB) = \frac{۱}{۴} = \Pr(A)\Pr(B)$$
$$\Pr(BC) = \frac{۱}{۴} = \Pr(B)\Pr(C)$$
$$\Pr(AC) = \frac{۱}{۴} = \Pr(A)\Pr(C)$$

$$\Pr(ABC) = \frac{۱}{۴} \neq \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$$

مثال

- فرض کنید یک دنباله Nتایی از آزمایشهای تصادفی ساده و مستقل در حال انجام است به طوریکه احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر p است (احتمال شکست 1-p). مطلوب است:
- الف) همه N ازمایش با موفقیت انجام شود.
- ب) حداقل یک ازمایش با موفقیت انجام شود.

مثال

- فرض کنید یک دنباله Nتایی از آزمایشهای تصادفی ساده و مستقل در حال انجام است به طوریکه احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر p است (احتمال شکست 1-p). مطلوب است:
- الف) همه N ازمایش با موفقیت انجام شود.
- ب) حداقل یک ازمایش با موفقیت انجام شود.
- حل:
- Ei: پیشامد موفقیت در آزمایش iام
- الف)

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_N) \overset{\text{استقلال}}{=} \prod_{i=1}^{N} P(E_i) = \prod_{i=1}^{N} p = p^N$$

- ب) با استفاده از متمم: یعنی متمم هیچ آزمایشی درست انجام نشود

$$(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_N) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap \ldots \cap E_N^c) \overset{\text{استقلال}}{=}$$

$$1 - \prod_{i=1}^{N} P(E_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1-p) = 1 - (1-p)^N$$

مثال

- فرض کنید یک دنباله Nتایی از آزمایشهای تصادفی ساده و مستقل در حال انجام است به طوریکه احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر **p** است (احتمال شکست **1-p**). مطلوب است:
- پ) دقیقا **k** آزمایش با موفقیت انجام شود.

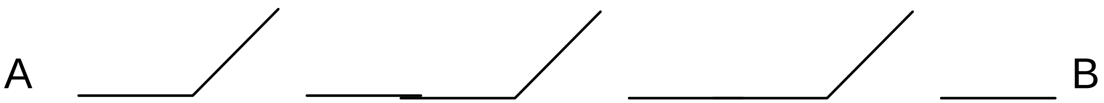
مثال

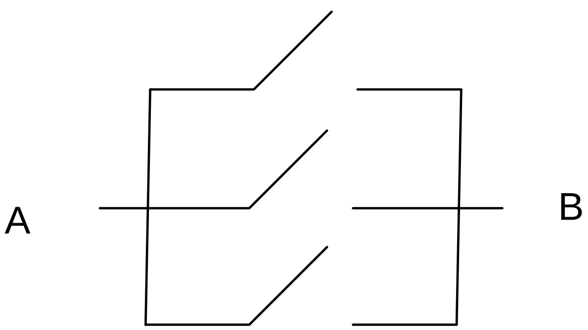
- فرض کنید یک دنباله Nتایی از آزمایشهای تصادفی ساده و مستقل در حال انجام است به طوریکه احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر p است (احتمال شکست 1-p). مطلوب است:
- پ) دقیقا k آزمایش با موفقیت انجام شود.
- حل:
  - Ei: پیشامد موفقیت در آزمایش iام
  - باید از N آزمایش k تا را انتخاب کرد و آنها حتماً پیروز و بقیه حتماً شکست

$$\binom{N}{k} p^{k}(1-p)^{N-k}$$

مثال

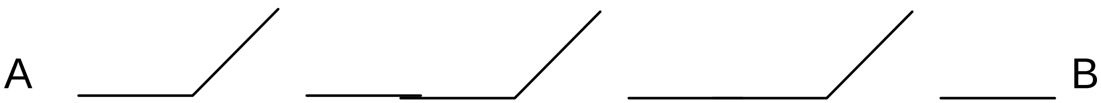
- فرض کنید یک سوییچ با احتمال p وصل میشود و سوییچها مستقل باشند. در هر یک از شکلهای زیر احتمال وصل شدن نقطه A به Bچقدر است؟





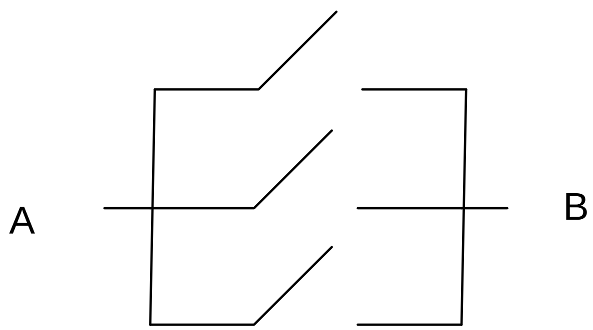
مثال

- فرض کنید یک سوییچ با احتمال p وصل میشود و سوییچها مستقل باشند. در هر یک از شکلهای زیر احتمال وصل شدن نقطه A به Bچقدر است؟
- حل:
- در حالت سری باید همه سوییچ ها وصل باشد تا جریان از A به B برسد.



$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \overset{\text{استقلال}}{=} \prod_{i=1}^{N} P(E_i) = p^3$$

- در حالت موازی باید حداقل یکی از سوییچها وصل باشد

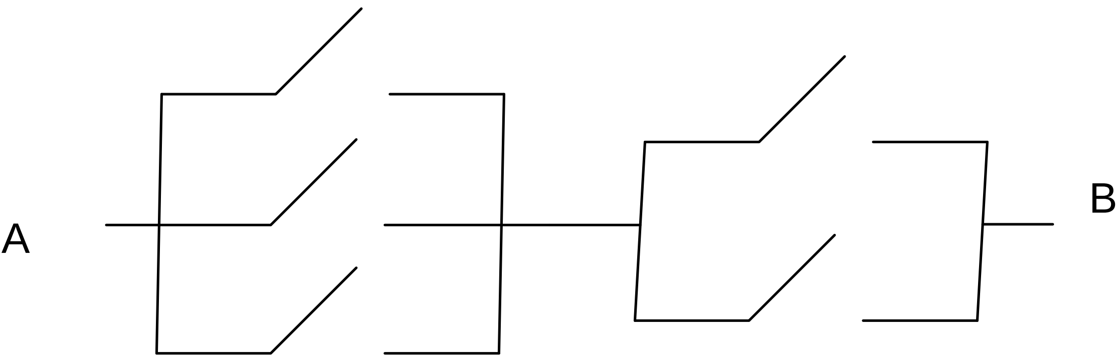


$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) \overset{\text{استقلال}}{=}$$

$$1 - \prod_{i=1}^{3} P(E_i^c) = 1 - (1-p)^3$$

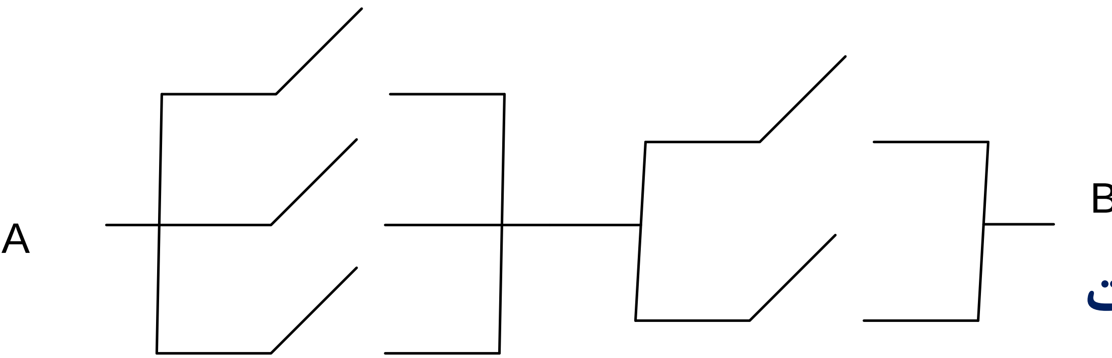
مثال

- فرض کنید یک سوییچ با احتمال p وصل میشود و سوییچها مستقل باشند. در هر یک از شکلهای زیر احتمال وصل شدن نقطه A به Bچقدر است؟



مثال

- فرض کنید یک سوییچ با احتمال p وصل میشود و سوییچها مستقل باشند. در هر یک از شکلهای زیر احتمال وصل شدن نقطه A به Bچقدر است؟



- حل: اگر سه سوییچ اول را با C1 تا C3 نشان دهیم و دو سوییچ بعدی را با C4 تا C5 در این صورت حداقل یکی از C1تا C3 و حداقل یکی از C4 تا C5 روشن باشد در این صورت:

$$P((C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3) \bigcap (C_4 \bigcup C_5)) = P((C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3)) * P(C_4 \bigcup C_5)$$

$$= (1-(1-p)^3)(1-(1-p)^2)$$

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا مجموع اعداد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.
- حل: فرض بر استقلال دو تاس است
- راه حل اول در جلسه قبل
- راه حل دوم

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا مجموع اعداد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.
- حل: فرض بر استقلال دو تاس است
- راه حل اول در جلسه قبل
- راه حل دوم

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),\ldots(1,6), \\ (2,1),(2,2),\ldots(2,6), \\ \vdots \\ (6,1),(6,2),\ldots(6,6) \end{Bmatrix} \Rightarrow n(S) = 36$$

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36}$$

$$B = \begin{Bmatrix} (1,6),(2,5),(3,4) \\ ,(4,3),(5,2),(6,1) \end{Bmatrix} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)) =$$

$$1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36}$$

راه حل دوم

- شرط روی پرتاب اول
- EA در پرتاب اول مجموع ۵ ظاهر شود
- EB در پرتاب اول مجموع ۷ ظاهر شود
- EC در پرتاب اول نه مجموع ۵و نه مجموع ۷ ظاهر شود
- F پیروزی شخص

راه حل دوم

- شرط روی پرتاب اول
- **EA** در پرتاب اول مجموع ۵ ظاهر شود
- **EB** در پرتاب اول مجموع ۷ ظاهر شود
- **EC** در پرتاب اول نه مجموع ۵و نه مجموع ۷ ظاهر شود
- **F** پیروزی شخص

$$P(F) = P(F \mid EA)P(EA) + P(F \mid EB)P(EB) + P(F \mid EC)P(EC) =$$

$$1 * \frac{4}{36} + 0 * \frac{6}{36} + P(F) * \frac{26}{36}$$

$$(1 - \frac{26}{36})P(F) = \frac{4}{36} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{10}$$

نکته مهم

- اگر **E** و **F** دو پیشامد ناسازگار باشند احتمال آنکه **E** قبل از **F** واقع شود برابر است با (مربوط به آخرین اسلاید درس قبل):

$$\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر A شروع کننده بازی باشداحتمال برنده شدن A چقدر است؟

حل:

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

$$P(E6)=\frac{5}{36}$$

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

$$P(E7)=\frac{6}{36}$$

نکته: با توجه به اینکه به صورت جداگانه تاس ها پرتاب می شود از نکته صفحه قبل نمی توان استفاده نمود.

CA: پیشامد پیروزی A

FA : پیشامد پیروزی A در پرتاب اول

$$P(FA)=\frac{5}{36}$$

FB : پیشامد پیروزی Bدر پرتاب اول

$$P(FB)=\frac{31}{36}*\frac{6}{36}=\frac{31}{216}$$

FN:پیشامد عدم پیروزی هر دو در پرتاب اول

$$P(FN)=\frac{31}{36}*\frac{30}{36}=\frac{155}{216}$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA \mid FA)P(FA) + P(CA \mid FB)P(FB) + P(CA \mid FN)P(FN) =$$

$$\underbrace{P(CA \mid FA)P(FA)}_{1*\frac{5}{36}} + \underbrace{P(CA \mid FB)P(FB)}_{0*\frac{31}{216}} + \underbrace{P(CA \mid FN)P(FN)}_{P(CA)*\frac{155}{216}} =$$

$$\frac{5}{36} + P(CA) * \frac{155}{216}$$

$$\Rightarrow P(CA) = \frac{\frac{5}{36}}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{61}{216}} = \frac{30}{61}$$

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر B شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟

حل:

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

$$P(E6)=\frac{5}{36}$$

$$P(E7)=\frac{6}{36}$$

CA: پیشامد پیروزی A

FA : پیشامد پیروزی A در پرتاب اول

FB : پیشامد پیروزی B در پرتاب اول

FN: پیشامد عدم پیروزی هر دو در پرتاب اول

$$P(FA)=\frac{30}{36}*\frac{5}{36}=\frac{25}{216}$$

$$P(FB)=\frac{6}{36}$$

$$P(FN)=\frac{30}{36}*\frac{31}{36}=\frac{155}{216}$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA)=P(CA\,|\,FA)P(FA)+P(CA\,|\,FB)P(FB)+P(CA\,|\,FN)P(FN)=$$

$$\underbrace{P(CA\,|\,FA)P(FA)}_{1*\frac{25}{216}}+\underbrace{P(CA\,|\,FB)P(FB)}_{0*\frac{6}{36}}+\underbrace{P(CA\,|\,FN)P(FN)}_{P(CA)*\frac{155}{216}}=$$

$$\frac{25}{216}+P(CA)*\frac{155}{216}$$

$$\Rightarrow P(CA)=\frac{\frac{25}{216}}{1-\frac{155}{216}}=\frac{\frac{25}{36}}{\frac{61}{216}}=\frac{25}{61}$$

ویژگی های احتمال شرطی

- احتمال شرطی تمام ویژگی های احتمال را دارد از جمله:

$$1)\ 0 \le P(A \mid B) \le 1$$

$$2)\ P(S \mid B) = 1$$

$3)\ A_1, A_2, \ldots, A_n$ ناسازگار $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B)$

- همچنین اگر A1 و A2 دو پیشامد مستقل به شرط B باشند در این صورت

$$P(A_1 \cap A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) P(A_2 \mid B)$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟

- حل:
- A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A1 \cap A2) = P(A1 \cap A2 \mid B)P(B) + P(A1 \cap A2 \mid B^c)P(B^c)$$

$$\overset{\text{استقلال}}{=} \quad P(A1 \mid B)P(A2 \mid B)P(B) + P(A1 \mid B^c)P(A2 \mid B^c)P(B^c)$$

$$= 0.4 * 0.4 * 0.3 + 0.2 + 0.2 + 0.7 =$$

$$0.048 + 0.028 = 0.076$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده سال دوم تصادف کند به شرط آنکه در سال اول تصادف کرده باشد چقدر است؟

- حل:
- A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A2 \mid A1) = \frac{P(A1 \cap A2)}{P(A1)} = \frac{0.076}{0.26} = \frac{76}{260} = \frac{19}{65}$$

سپاس